Zahlenfolgen (Einführung)

Definition:

Eine Funktion, deren Definitionsbereich eine Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen (außer Null) ist, heißt *Zahlenfolge*. Der Wertebereich ist eine Teilmenge der reellen Zahlen. Die Funktionswerte heißen Glieder der Zahlenfolge.

a_n ist das Glied, das der natürlichen Zahl n zugeordnet ist.
n ist die Platznummer des Gliedes.
Die Folge mit dem n-ten Glied a_n wird mit (a_n) bezeichnet.

Beispiele:
a)

n	1	2	3	4	5	6
a_n	3	6	9	12	15	18

b)
$(a_n) = 3; 6; 9; 12; 15; 18$

Darstellungsformen für Zahlenfolgen

1. Explizite Bildungsvorschrift: z.B. $a_n = n^2 + 3$
2. Rekursive Bildungsvorschrift: z.B. $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 2a_1 - 1$
   (Ein Glied und die Formel zur Berechnung des Folgegliedes vorgeben)

Übung:

Gib die ersten vier Glieder der Zahlenfolge $<a_n> = n^2 - 3$ an!

Ermittle eine rekursive Darstellung der Zahlenfolge $<a_n> = n^2 - 3$!

Gib zu folgenden Zahlenfolgen eine explizite Bildungsvorschrift an!
a) 5; 9; 13; 17; 21; ...
b) 2; -4; 6; -8; 10; -12; ...
c) 5; 10; 17; 26; 37; ...

Monotonie und Beschränktheit von Zahlenfolgen

Definiere die Begriffe „endliche Zahlenfolge“, „unendliche Zahlenfolge“ „Monotonie“ und „Beschränktheit“ von Zahlenfolgen !
Erläutere diese Begriffe an Beispielen!

Arithmetische Zahlenfolgen

$a_n = 3n - 1$
$<a_n> = 2; 5; 8; 11; ...$
Die Differenz zwischen den Gliedern ist konstant.

$\boxed{a_{n+1} - a_n = d = \text{const.}}$

Bildungsgesetz:
$<a> = a_1; a_1 + d; a_1 + 2d; ...$

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$

Übung:
Untersuche, ob es sich bei folgenden Zahlenfolgen um arithmetische Zahlenfolgen handelt!

$a_n = 5n + 1$ (ja)

$b_k = k^2 - 2$ (nein)

Übung:
Von einer arithmetischen Folge sind bekannt:

a)	b)	c)	d)
$a_1 = 2$	$a_1 = 4$	$a_5 = 10$	$a_4 = 5$
$a_2 = 6$	$d = -2$	$a_8 = 20{,}5$	$a_8 = 15$
ges.: d	ges.: a_3	ges.: d	ges.: d; a_1; a_{30};
Lösung: $d = 4$	Lösung: $a_3 = 0$	Lösung: $d = 3{,}5$	Lösung: $d=2{,}5$; $a_1=-2{,}5$; $a_{30}=70$

Arithmetische Reihen

Etwa im Jahr 500 v.u.Z. Überlegte sich Zenon folgendes:
Achilles läuft mit einer Schildkröte im Stadion um die Wette. Die Schildkröte hat eine Runde Vorsprung. Achilles läuft 12mal so schnell wie die Schildkröte.
Zenon schließt:

Achilles läuft	Die Schildkröte läuft	
1 Runde	$\frac{1}{12}$ Runde	nicht eingeholt
$\frac{1}{12}$ Runde	$\frac{1}{12^2}$ Runde	nicht eingeholt
$\frac{1}{12^2}$ Runde	$\frac{1}{12^3}$ Runde	nicht eingeholt usw.

Also holt Achilles die Schildkröte nie ein!!

Was ist falsch an Zenons Schluss?

Lösung:
Der Weg des Achilles: $1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{12^3}+...$
stellt eine unendliche Reihe dar, deren obere Grenze $\frac{12}{11}$ ist. Achilles läuft aber weiter, nach $\frac{12}{11}$ Runden hat er die Schildkröte eingeholt.

Partialsummenfolgen- Arithmetische Reihen

Gegeben ist die arithmetische Zahlenfolge $<a_n> = 1; 3; 5; 7; 9$.
Dann sind
$s_1 = 1$
$s_2 = 4$
$s_3 = 9$
$s_4 = 16$
$s_5 = 25$
die Glieder der Partialsummenfolge $<s_n>$ der Zahlenfolge $<a_n>$.

allgemein:

Das n-te Glied der Partialsummenfolge $<s_n>$ der Zahlenfolge $<a_n>$ist ein Ausdruck der Form

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Rekursive Bildungsvorschrift:

$$\boxed{\begin{array}{l} s_1 = a_1 \\ s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \end{array}}$$

Summenformel für arithmetische Reihen

Episode:
Der Lehrer von Carl Friedrich Gauss (1777-1855) wollte die Schüler beschäftigen, um seine Ruhe zu haben. Die Schüler sollten die Zahlen von 1 bis 1000 addieren.
Wie lange braucht ihr dazu?
Gauss war nach wenigen Minuten fertig. Wie ging er vor?

$$\underline{s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}$$
$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + a_n$$
$$\underline{s_n = a_n + (a_1 - d) + (a_1 - 2d) + ... + a_1}$$
$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + d + a_1 - d) + ...$$
$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$
$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

Beispiele:

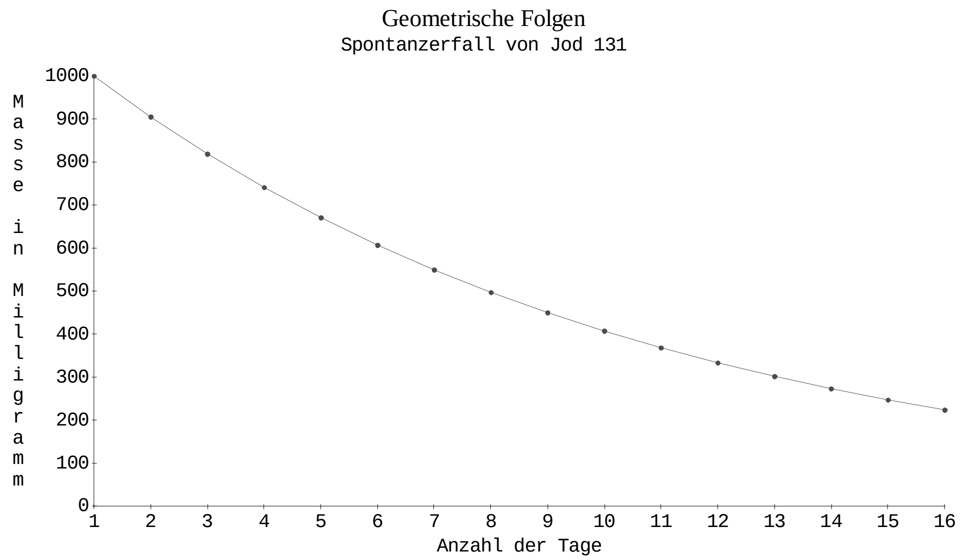
	Gegeben	Gesucht	Lösung
B1	$a_6 = 20$	a_1;	10
	$a_{14} = 36$	d;	2
		a_{20};	48
		s_{20}	580
B2	$a_1 = 2$	n;	91
	$d = 0{,}2$	s_n;	1001
	$a_n = 20$		

Übung:

Von einer Zahlenfolge ist folgendes bekannt:	Gesucht sind:	Lösung:
$a_5 = 5$	a_1	-7
$s_n = 430$	n	20
$d = 3$	explizite Bildungsvorschrift	$a_n = 3n - 10$
$a_n = 50$	rekursive Bildungsvorschrift	$a_1 = -7$; $a_{n+1} = a_n + 3$
	s_{100}	14150

Geometrische Zahlenfolgen

Tage	Masse in mg	absolute Abnahme in mg
1	1000	95,0
2	905	86,0
3	819	77,8
4	741	70,4
5	671	63,7
6	607	57,7
7	549	52,2
8	497	47,2
9	450	42,7
10	407	38,7
11	369	35,0
12	334	31,7
13	302	28,7
14	273	26,0
15	247	23,5
16	224	21,3



Stoff Dieses Verhalten lässt sich durch geometrische Zahlenfolgen beschreiben.

Definition:
Eine Zahlenfolge heißt geometrische Folge, wenn gilt: $a_{n+1} = a_n \cdot q$. $(a_1, q \neq 0)$

Übung:
Überprüfe diese Beziehung am Beispiel des Spontanzerfalls von Jod 131! (Abbildung oben)

Summenformel für geometrische Reihen

$$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Übung:

Aufgabe	a_1	q	n	a_n	s_n
a	320	0,4	12	(0,01342)	(533,324)
b	3	(2)	5	48	(93)
c	20	1,2	(7)	59,72	(258,32)
d	8	3	(6)	(1944)	2912